চতুর্থ অধ্যায়

বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ

দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানে বীজগণিতের প্রয়োগ ও ব্যবহার ব্যাপকভাবে হয়ে থাকে। বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র বা সংক্ষেপে সূত্র বলা হয়। নানাবিধ গাণিতিক সমস্যা বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে সমাধান করা যায়। সপ্তম শ্রেণিতে প্রথম চারটি সূত্র ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে সেগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো এবং এদের প্রয়োগ দেখানোর জন্য কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো যেন শিক্ষার্থীরা প্রয়োগ সম্পর্কে যথেষ্ট জ্ঞান অর্জন করতে পারে। এ অধ্যায়ে বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ ও ঘন নির্ণয়, মধ্যপদ বিশ্লেষণ, উৎপাদক এবং এদের সাহায্যে কীভাবে বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করা যায় তা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ নিরূপণ, সরলীকরণ ও মান নির্ণয় করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির ঘন নির্ণয়, সরলীকরণ ও মান নির্ণয় করতে পারবে।
- মধ্যপদ বিশ্লেষণের সাহায্যে রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করতে পারবে।

৪.১ বীজগণিতীয় সূত্রাবলি

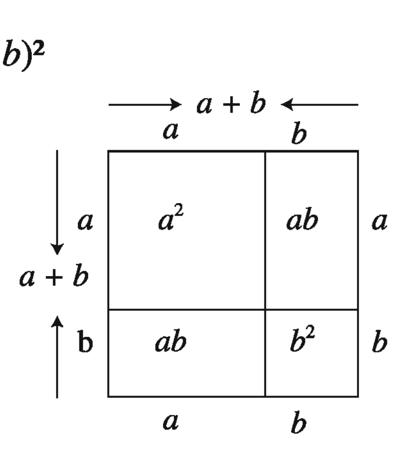
সপ্তম শ্রেণিতে বীজগণিতীয় প্রথম চারটি সূত্র ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে সেগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো।

$(a+b)^2$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যাটি নিম্নরূপ :

সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= (a+b)\times(a+b) = (a+b)^2$

$$\therefore\ (a+b)^2 = a\times(a+b) + b\times(a+b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



আবার, বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$$a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

লক্ষ করি, সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$\therefore \; (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সপ্তম শ্রেণিতে যে সূত্র ও অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্পর্কে জেনেছি তা হলো :

সূত্র ১ । $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

কথায়, দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ + ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ ।

সূত্র ২ । $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

কথায়, দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ – ২ × ১ম রাশি × ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ ।

সূত্র ৩ । $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

কথায়, দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল = রাশি দুইটির যোগফল × রাশি দুইটির বিয়োগফল

সূত্র ৪ । $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

কথায়, দুইটি দ্বিপদী রাশির প্রথম পদ একই হলে, তাদের গুণফল হবে প্রথম পদের বর্গ, স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদদ্বয়ের সমষ্টির সাথে প্রথম পদের গুণফল ও স্ব-স্ব চিহ্নযুক্ত দ্বিতীয় পদদ্বয়ের গুণফলের সমষ্টির সমান ।

অর্থাৎ, $(x+a)(x+b) = x^2 +$ (a এবং b এর বীজগণিতীয় যোগফল) $x +$ (a এবং b এর গুণফল)

অনুসিদ্ধান্ত ১ । $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২ । $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩ । $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪ । $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫ । $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৬ । $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

বা, $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

উদাহরণ ১ । $3x + 5y$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

সমাধান : $(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5y + (5y)^2$

$= 9x^2 + 30x^2 + 25y^2$

২০১৫

উদাহরণ ২। বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে 25-এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(25)^2 = (20 + 5)^2 = (20)^2 + 2 \times 20 \times 5 + (5)^2$

$= 400 + 200 + 25$

$= 625$

উদাহরণ ৩। $4x - 7y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(4x - 7y)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7y + (7y)^2$

$= 16x^2 - 56xy + 49y^2$

উদাহরণ ৪। $a + b = 8$ এবং $ab = 15$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$= (8)^2 - 2 \times 15$

$= 64 - 30$

$= 34$

উদাহরণ ৫। $a - b = 7$ এবং $\mathrm{ab} = 60$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

$= (7)^2 + 2 \times 60$

$= 49 + 120$

$= 169$

উদাহরণ ৬। $x - y = 3$ এবং $xy = 10$ হলে, $(x + y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$

$= (3)^2 + 4 \times 10$

$= 9 + 40$

$= 49$

উদাহরণ ৭। $a + b = 7$ এবং $\mathrm{ab} = 10$ হলে, $(a - b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$= (7)^2 - 4 \times 10$

$= 49 - 40$

$= 9$

উদাহরণ ৮ । $x-\frac{1}{x}=5$ হলে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4.x.\frac{1}{x}$

$$= (5)^2 + 4$$
$$= 25+4$$
$$= 29$$

কাজ :

১ । $2a + 5b$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

২ । $4x - 7$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

৩ । $a + b = 7$ এবং $ab = 9$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর ।

৪ । $x - y = 5$ এবং $xy = 6$ হলে, $(x + y)^2$ এর মান নির্ণয় কর ।

উদাহরণ ৯ । সূত্রের সাহায্যে $3p + 4$ কে $3p - 4$ দ্বারা গুণ কর ।

সমাধান : $(3p + 4)(3p - 4) = (3p)^2 - (4)^2 \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

$$= 9p^2 - 16$$

উদাহরণ ১০ । সূত্রের সাহায্যে $5m + 8$ কে $5m + 9$ দ্বারা গুণ কর ।

সমাধান : আমরা জানি, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore \; (5m + 8)(5m + 9) = (5m)^2 + (8 + 9) \times 5m + 8 \times 9$

$$= 25m^2 + 17 \times 5m + 72$$
$$= 25m^2 + 85m + 72$$

উদাহরণ ১১ । সরল কর: $(5a - 7b)^2 + 2(5a - 7b)(9b - 4a) + (9b - 4a)^2$

সমাধান : ধরি, $(5a - 7b) = x$ এবং $9b - 4a = y$

২০১৮

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^2 + 2xy + y^2$

$= (x + y)^2$

$= (5a - 7b + 9b - 4a)^2$ [x এবং y এর মান বসিয়ে]

$= (a + 2b)^2$

$= a^2 + 4ab + 4b^2$

উদাহরণ ১২। $(x + 6)(x + 4)$ কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$\therefore (x+6)(x+4) = \left(\frac{x+6+x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$= (x+5)^2 - 1^2$

উদাহরণ ১৩। $x = 4, y = -8$ এবং $z = 5$ হলে, $25(x + y)^2 - 20(x + y)(y + z) + 4(y + z)^2$ এর মান কত ?

সমাধান : ধরি, $x + y = a$ এবং $y + z = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= 25a^2 - 20ab + 4b^2$

$= (5a)^2 - 2 \times 5a \times 2b + (2b)^2$

$= (5a - 2b)^2$

$= \{5(x + y) - 2(y + z)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= (5x + 5y - 2y - 2z)^2$

$= (5x + 3y - 2z)^2$

$= \{5 \times 4 + 3 \times (-8) - 2 \times 5\}^2$ [x, y ও z এর মান বসিয়ে]

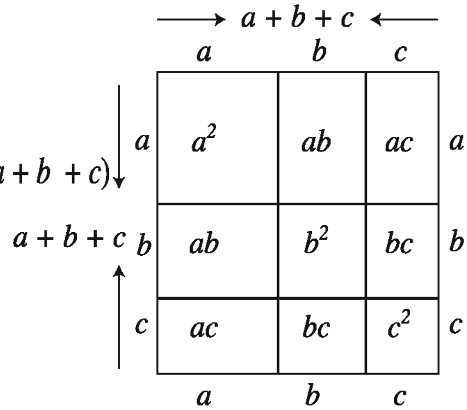
$= (20 - 24 - 10)^2$

$= (-14)^2 = 196$

২০১৮

কাজ : ১। সূত্রের সাহায্যে $(5x + 7y)$ ও $(5x - 7y)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।
২। সূত্রের সাহায্যে $(x + 10)$ ও $(x - 14)$ এর গুণফল নির্ণয় কর।
৩। $(4x - 3y)(6x + 5y)$ কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ কর।

$(a + b + c)^2$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :



সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

$(a + b + c) \times (a + b + c) = (a + b + c)^2$

$\therefore (a + b + c)^2 = a \times (a + b + c) + b \times (a + b + c) + c \times (a + b + c)$

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ca + bc + c^2$

$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

আবার, বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

লক্ষ করি, সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্রটির অংশগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

উদাহরণ ১৪। $2x + 3y + 5z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $2x = a$, $3y = b$ এবং $5z = c$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (a + b + c)^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y + 2 \times 3y \times 5z + 2 \times 2x \times 5z$ [a, b ও c এর

$= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$ মান বসিয়ে]

$\therefore (4x + 3y + 5z)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$

২০১৫

উদাহরণ ১৫ । $5a - 6b - 7c$ এর বর্গ নির্ণয় কর ।

সমাধান : $(5a - 6b - 7c)^2 = \{5a - (6b + 7c)\}^2$

$$= (5a)^2 - 2 \times 5a \times (6b + 7c) + (6b + 7c)^2$$

$$= 25a^2 - 10a\,(6b + 7c) + (6b)^2 + 2 \times 6b \times 7c + (7c)^2$$

$$= 25a^2 - 60ab - 70ac + 36b^2 + 84bc + 49c^2$$

$$= 25a^2 + 36b^2 + 49c^2 - 60ab + 84bc - 70ac$$

বিকল্প সমাধান :

আমরা জানি, $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

এখানে, $5a = x$, $-6b = y$ এবং $-7c = z$ ধরে

$$(5a - 6b - 7c)^2 = (5a)^2 + (-6b)^2 + (-7c)^2 + 2 \times (5a) \times (-6b) + 2 \times (-6b) \times (-7c) + 2 \times (5a) \times (-7c)$$

$$= 25a^2 + 36b^2 + 49c^2 - 60ab + 84bc - 70ac$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

১ । $ax + by + c$ ২ । $4x + 5y - 7z$

অনুশীলনী ৪.১

১ । সূত্রের সাহায্যে নিচের রাশিগুলোর বর্গ নির্ণয় কর :

(ক) $5a + 7b$ (খ) $6x + 3$ (গ) $7p - 2q$

(ঘ) $ax - by$ (ঙ) $x^3 + xy$ (চ) $11a - 12b$

(ছ) $6x^2y - 5xy^2$ (জ) $-x - y$ (ঝ) $-xyz - abc$

(ঞ) $a^2x^3 - b^2y^4$ (ট) 108 (ঠ) 606

(ড) 597 (ঢ) $a - b + c$ (ণ) $ax + b + 2$

(ত) $xy + yz - zx$ (থ) $3p + 2q - 5r$ (দ) $x^2 - y^2 - z^2$

(ধ) $7a^2 + 8b^2 - 5c^2$

২০১৮

২। সরল কর :

(ক) $(x + y)^2 + 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2$

(খ) $(2a + 3b)^2 - 2(2a + 3b)(3b - a) + (3b - a)^2$

(গ) $(3x^2 + 7y^2)^2 + 2(3x^2 + 7y^2)(3x^2 - 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)^2$

(ঘ) $(8x + y)^2 - (16x + 2y)(5x + y) + (5x + y)^2$

(ঙ) $(5x^2 - 3x - 2)^2 + (2 + 5x^2 - 3x)^2 - 2(5x^2 - 3x - 2)(2 + 5x^2 - 3x)$

৩। সূত্র প্রয়োগ করে গুণফল নির্ণয় কর :

(ক) $(x + 7)(x - 7)$

(খ) $(5x + 13)(5x - 13)$

(গ) $(xy + yz)(xy - yz)$

(ঘ) $(ax + b)(ax - b)$

(ঙ) $(a + 3)(a + 4)$

(চ) $(ax + 3)(ax + 4)$

(ছ) $(6x + 17)(6x - 13)$

(জ) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$

(ঝ) $(ax - by + cz)(ax + by - cz)$

(ঞ) $(3a - 10)(3a - 5)$

(ট) $(5a + 2b - 3c)(5a + 2b + 3c)$

(ঠ) $(ax + by + 5)(ax + by + 3)$

৪। $a = 4, b = 6$ এবং $c = 3$ হলে $4a^2b^2 - 16ab^2c + 16b^2c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

৫। $x - \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। $a + \frac{1}{a} = 4$ হলে, $a^4 + \frac{1}{a^4}$ এর মান কত ?

৭। $m = 6, n = 7$ হলে, $16(m^2 + n^2)^2 + 56(m^2 + n^2)(3m^2 - 2n^2) + 49(3m^2 - 2n^2)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

৮। $a - \frac{1}{a} = m$ হলে, দেখাও যে, $a^4 + \frac{1}{a^4} = m^4 + 4m^2 + 2$

৯। $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 18$

১০। $m + \frac{1}{m} = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^4 + \frac{1}{m^4} = 2$

১১। $x + y = 12$ এবং $xy = 27$ হলে, $(x - y)^2$ ও $x^2 + y^2$ এর মান নির্ণয় কর।

১২। $a + b = 13$ এবং $a - b = 3$ হলে, $2a^2 + 2b^2$ ও ab এর মান নির্ণয় কর। ২০১৮

১৩। দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(ক) $(5p-3q)(p+7q)$ (খ) $(6a+9b)(7b-8a)$

(গ) $(3x+5y)(7x-5y)$ (ঘ) $(5x+13)(5x-13)$

১৪। দুইটি সংখ্যা a ও b, যেখানে $a > b$। সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 12 এবং গুণফল 32।

ক) সূত্রের সাহায্যে গুণ করো: $(2x+3)(2x-7)$

খ) $2a^2+2b^2$এর মান নির্ণয় করো।

গ) প্রমাণ কর যে, $(a+2b)^2-5b^2=176$

৪.২ ঘনফলের সূত্রাবলি ও অনুসিদ্ধান্ত

সূত্র ৫। $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$$= a^3+b^3+3ab(a+b)$$

প্রমাণ : $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+(a^2b+2ab^2+b^3)$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$= a^3+3ab(a+b)+b^3$$
$$= a^3+b^3+3ab(a+b)$$

অনুসিদ্ধান্ত ৭। $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)}$

সূত্র ৬। $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$= a^3-b^3-3ab(a-b)$$

প্রমাণ : $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$$
$$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$$
$$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$= a^3-b^3-3ab(a-b)$$

২০১৮

অনুসিদ্ধান্ত ৮। $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

উদাহরণ ১৬। $3x+2y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3\times(3x)^2\times(2y) + 3\times(3x)\times(2y)^2 + (2y)^3$

$$= 27x^3 + 3\times 9x^2\times 2y + 3\times 3x\times 4y^2 + 8y^3$$

$$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

উদাহরণ ১৭। $2a+5b$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2a+5b)^3 = (2a)^3 + 3\times(2a)^2\times(5b) + 3\times(2a)\times(5b)^2 + (5b)^3$

$$= 8a^3 + 3\times 4a^2\times 5b + 3\times 2a\times 25b^2 + 125b^3$$

$$= 8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$$

উদাহরণ ১৮। $m-2n$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(m-2n)^3 = (m)^3 - 3\times(m)^2\times(2n) + 3\times m\times(2n)^2 - (2n)^3$

$$= m^3 - 3m^2\times 2n + 3m\times 4n^2 - 8n^3$$

$$= m^3 - 6m^2n + 12mn^2 - 8n^3$$

উদাহরণ ১৯। $4x-5y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(4x-5y)^3 = (4x)^3 - 3\times(4x)^2\times(5y) + 3\times(4x)\times(5y)^2 - (5y)^3$

$$= 64x^3 - 3\times 16x^2\times 5y + 3\times 4x\times 25y^2 - 125y^3$$

$$= 64x^3 - 240x^2y + 300xy^2 - 125y^3$$

উদাহরণ ২০। $x+y-z$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x+y-z)^3 = \{(x+y)-z\}^3$

$$= (x+y)^3 - 3(x+y)^2\times z + 3(x+y)\times z^2 - z^3$$

$$= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) - 3(x^2+2xy+y^2)\times z + 3(x+y)\times z^2 - z^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2z - 6xyz - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - z^3$$

$$= x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - 6xyz$$

২০১৮

কাজ : সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

১। $ab + bc$ ২। $2x - 5y$ ৩। $2x - 3y - z$

উদাহরণ ২১ । সরল কর :

$$(4m+2n)^3 + 3(4m+2n)^2(m-2n) + 3(4m+2n)(m-2n)^2 + (m-2n)^3$$

সমাধান : ধরি, $4m + 2n = a$ এবং $m - 2n = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a+b)^3$

$= \{(4m+2n) + (m-2n)\}^3$

$= (4m + 2n + m - 2n)^3$

$= (5m)^3 = 125m^3$

উদাহরণ ২২ । সরল কর :

$$(4a-8b)^3 - (3a-9b)^3 - 3(a+b)(4a-8b)(3a-9b)$$

সমাধান : ধরি, $4a - 8b = x$ এবং $3a - 9b = y$

$\therefore x - y = (4a-8b) - (3a-9b) = 4a - 8b - 3a + 9b = a + b$

এখন প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 3(x-y) \times x \times y$

$= x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

$= (x-y)^3$

$= (a+b)^3$

উদাহরণ ২৩ । $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে, $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান : $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$= (3)^3 - 3 \times 2 \times 3$ [মান বসিয়ে]

$= 27 - 18$

$= 9$

বিকল্প সমাধানঃ দেওয়া আছে, $a+b=3$ এবং $ab=2$

এখন, $a+b=3$

বা, $(a+b)^3=(3)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=27$

বা, $a^3+b^3+3\times2\times3=27$

বা, $a^3+b^3+18=27$

বা, $a^3+b^3=27-18$

$\therefore a^3+b^3=9$

উদাহরণ ২৪। $x-y=10$ এবং $xy=30$ হলে, x^3-y^3 এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(10)^3+3\times30\times10$

$=1000+900$

$=1900$

উদাহরণ ২৫। $x+y=4$ হলে, x^3+y^3+12xy এর মান কত ?

সমাধান : $x^3+y^3+12xy=x^3+y^3+3\times4\times xy$

$=x^3+y^3+3(x+y)\times xy$

$=x^3+y^3+3xy(x+y)$

$=(x+y)^3$

$=(4)^3$

$=64.$

উদাহরণ ২৬। $a+\frac{1}{a}=7$ হলে, $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $a^3+\frac{1}{a^3}=a^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3$

২০১৮

$$= \left(a+\frac{1}{a}\right)^3 - 3\times a\times\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$= (7)^3 - 3\times 7$$
$$= 343 - 21$$
$$= 322$$

উদাহরণ ২৭ । $m = 2$ হলে, $27m^3 + 54m^2 + 36m + 3$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান : প্রদত্ত রাশি = $(3m)^3 + 3\times(3m)^2\times 2 + 3\times(3m)\times(2)^2 + (2)^3 - 5$

$$= (3m+2)^3 - 5$$
$$= (3\times 2+2)^3 - 5 \qquad [m \text{ এর মান বসিয়ে}]$$
$$= (6+2)^3 - 5 = 8^3 - 5$$
$$= 512 - 5 = 507$$

কাজ : ১ । সরল কর : $(7x-6)^3 - (5x-6)^3 - 6x(7x-6)(5x-6)$

২ । $a+b=10$ এবং $ab=21$ হলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর ।

৩ । $a+\frac{1}{a}=3$ হলে, দেখাও যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=18$

৪.৩ ঘনফলের সাথে সম্পৃক্ত আরও দুইটি সূত্র

সূত্র ৭ । $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

প্রমাণ : $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$= (a+b)\{(a+b)^2 - 3ab\}$$
$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$$
$$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

বিপরীতভাবে, $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

২০১৮

সূত্র ৮ । $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

প্রমাণ : $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$$= (a-b)\{(a-b)^2 + 3ab\}$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

বিপরীতভাবে, $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

$\therefore\ (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

উদাহরণ ২৮ । সূত্রের সাহায্যে (x^2+2) ও (x^4-2x^2+4) এর গুণফল নির্ণয় কর ।

সমাধান : $(x^2+2)(x^4-2x^2+4)$

$$= (x^2+2)\{(x^2)^2 - x^2 \times 2 + 2^2\}$$

$$= (x^2)^3 + (2)^3$$

$$= x^6 + 8$$

উদাহরণ ২৯ । সূত্রের সাহায্যে $(4a-5b)$ ও $(16a^2+20ab+25b^2)$ এর গুণফল নির্ণয় কর ।

সমাধান : $(4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$

$$= (4a-5b)\{(4a)^2 + 4a \times 5b + (5b)^2\}$$

$$= (4a)^3 - (5b)^3$$

$$= 64a^3 - 125b^3$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে $(2a+3b)$ ও $(4a^2-6ab+9b^2)$ এর গুণফল নির্ণয় কর ।

২০১৮

অনুশীলনী ৪.২

১। সূত্রের সাহায্যে নিচের রাশিগুলোর ঘন নির্ণয় কর :

(ক) $3x+y$ (খ) x^2+y (গ) $5p+2q$ (ঘ) a^2b+c^2d (ঙ) $6p-7$ (চ) $ax-by$

(ছ) $2p^2-3r^2$ (জ) x^3+2 (ঝ) $2m+3n-5p$ (ঞ) $x^2-y^2+z^2$ (ট) $a^2b^2-c^2d^2$

(ঠ) a^2b-b^3c (ড) x^3-2y^3 (ঢ) $11a-12b$ (ণ) x^3+y^3

২। সরল কর :

(ক) $(3x+y)^3+3(3x+y)^2(3x-y)+3(3x+y)(3x-y)^2+(3x-y)^3$

(খ) $(2p+5q)^3+3(2p+5q)^2(5q-2p)+3(2p+5q)(5q-2p)^2+(5q-2p)^3$

(গ) $(x+2y)^3-3(x+2y)^2(x-2y)+3(x+2y)(x-2y)^2-(x-2y)^3$

(ঘ) $(6m+2)^3-3(6m+2)^2(6m-4)+3(6m+2)(6m-4)^2-(6m-4)^3$

(ঙ) $(x-y)^3+(x+y)^3+6x(x^2-y^2)$

৩। $a+b=8$ এবং $ab=15$ হলে, a^3+b^3 এর মান কত ?

৪। $x+y=2$ হলে, দেখাও যে, $x^3+y^3+6xy=8$

৫। $2x+3y=13$ এবং $xy=6$ হলে, $8x^3+27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। $p-q=5,\ pq=3$ হলে, p^3-q^3 এর মান নির্ণয় কর।

৭। $x-2y=3$ হলে, x^3-8y^3-18xy এর মান নির্ণয় কর।

৮। $4x-3=5$ হলে, প্রমাণ কর যে, $64x^3-27-180x=125$

৯। $a=-3$ এবং $b=2$ হলে, $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

১০। $a=7$ হলে, $a^3+6a^2+12a+1$ এর মান নির্ণয় কর।

১১। $x=5$ হলে, $x^3-12x^2+48x-64$ এর মান কত ?

১২। $a^2+b^2=c^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^6+b^6+3a^2b^2c^2=c^6$

১৩। $x+\frac{1}{x}=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+\frac{1}{x^3}=52$

১৪। $a-\frac{1}{a}=5$ হলে, $a^3-\frac{1}{a^3}$ এর মান কত ?

২০১৮

১৫। সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :

(ক) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$ (খ) $(ax-by)(a^2x^2+abxy+b^2y^2)$

(গ) $(2ab^2-1)(4a^2b^4+2ab^2+1)$ (ঘ) $(x^2+a)(x^4-ax^2+a^2)$

(ঙ) $(7a+4b)(49a^2-28ab+16b^2)$ (চ) $(2a-1)(4a^2+2a+1)(8a^3+1)$

(ছ) $(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(জ) $(5a+3b)(25a^2-15ab+9b^2)(125a^3-27b^3)$

৪.৪ উৎপাদকে বিশ্লেষণ

উৎপাদক : যদি কোনো বীজগণিতীয় রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল হয়, তাহলে শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথম রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক (*Factor*) বলা হয়। যেমন, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, এখানে $(a+b)$ ও $(a-b)$ রাশি দুইটি (a^2-b^2) এর উৎপাদক।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ : যখন কোনো বীজগণিতীয় রাশিকে সম্ভাব্য দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা হয়, তখন একে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা বলে এবং ঐ রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বলা হয়। যেমন, $x^2+2x=x(x+2)$ [এখানে x ও $(x+2)$ উৎপাদক]

উৎপাদক নির্ণয়ের নিয়মগুলো নিচে দেওয়া হলো :

(ক) সুবিধামতো সাজিয়ে :

$px-qy+qx-py$ কে সাজানো হলো, $px+qx-py-qy$ রূপে।

এখন, $px+qx-py-qy=x(p+q)-y(p+q)=(p+q)(x-y)$.

আবার, $px-qy+qx-py$ কে সাজানো হলো, $px-py+qx-qy$ রূপে।

এখন, $px-py+qx-qy=p(x-y)+q(x-y)=(x-y)(p+q)$.

(খ) একটি রাশিকে পূর্ণ বর্গ আকারে প্রকাশ করে :

$$\begin{aligned} x^2+4xy+4y^2 &= (x)^2+2\times x\times 2y+(2y)^2 \\ &= (x+2y)^2=(x+2y)(x+2y) \end{aligned}$$

(গ) একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে এবং a^2-b^2 সূত্র প্রয়োগ করে :

$a^2+2ab-2b-1$

$=a^2+2ab+b^2-b^2-2b-1$ [এখানে b^2 একবার যোগ এবং একবার বিয়োগ করা হয়েছে। এতে রাশির মানের কোনো পরিবর্তন হয় না]

$=(a^2+2ab+b^2)-(b^2+2b+1)$

$=(a+b)^2-(b+1)^2$

$=(a+b+b+1)(a+b-b-1)$

$=(a+2b+1)(a-1)$

২০১৮

বিকল্প নিয়ম :

$$
\begin{aligned}
& a^2+2ab-2b-1 \\
& =(a^2-1)+(2ab-2b) \\
& =(a+1)(a-1)+2b(a-1) \\
& =(a-1)(a+1+2b) \\
& =(a-1)(a+2b+1)
\end{aligned}
$$

(ঘ) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ সূত্রটি ব্যবহার করে :

$$
\begin{aligned}
x^2+7x+10 &= x^2+(2+5)x+2\times 5 \\
&=(x+2)(x+5)
\end{aligned}
$$

(ঙ) একটি রাশিকে ঘন আকারে প্রকাশ করে :

$$
\begin{aligned}
& 8x^3+36x^2+54x+27 \\
& =(2x)^3+3\times(2x)^2\times 3+3\times 2x\times(3)^2+(3)^3 \\
& =(2x+3)^3 \\
& =(2x+3)(2x+3)(2x+3)
\end{aligned}
$$

(চ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ এবং $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

সূত্র দুইটি ব্যবহার করে :

$$
\begin{aligned}
8x^3+125=(2x)^3+(5)^3 &=(2x+5)\{(2x)^2-(2x)\times 5+(5)^2\} \\
&=(2x+5)(4x^2-10x+25) \\
27x^3-8=(3x)^3-(2)^3 &=(3x-2)\{(3x)^2+(3x)\times 2+(2)^2\} \\
&=(3x-2)(9x^2+6x+4)
\end{aligned}
$$

উদাহরণ ১। $27x^4+8xy^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান :

$$
\begin{aligned}
27x^4+8xy^3 &= x(27x^3+8y^3) \\
&= x\{(3x)^3+(2y)^3\} \\
&= x(3x+2y)\{(3x)^2-(3x)\times(2y)+(2y)^2\} \\
&= x(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)
\end{aligned}
$$

উদাহরণ ২। $24x^3-81y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান :

$$
\begin{aligned}
24x^3-81y^3 &= 3(8x^3-27y^3) \\
&= 3\{(2x)^3-(3y)^3\} \\
&= 3(2x-3y)\{(2x)^2+(2x)\times(3y)+(3y)^2\} \\
&= 3(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)
\end{aligned}
$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। $4x^2-y^2$ ২। $6ab^2-24a$ ৩। $x^2+2px+p^2-4$ ৪। x^3+27y^3 ৫। $27a^3-8$

২০১৮

৪.৫ $x^2 + px + q$ আকারের রাশির উৎপাদক

আমরা জানি, $x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)(x + b)$ । এই সূত্রটির বামপাশের রাশির সাথে $x^2 + px + q$ এর তুলনা করলে দেখা যায় যে, উভয় রাশিতেই তিনটি পদ আছে, প্রথম পদটি x^2 ও এর সহগ 1 (এক), দ্বিতীয় বা মধ্য পদটিতে x আছে যার সহগ যথাক্রমে $(a + b)$ ও p এবং তৃতীয় পদটি x বর্জিত, যেখানে যথাক্রমে ab ও q আছে ।

$x^2 + (a + b)\,x + ab$ এর দুইটি উৎপাদক । অতএব, $x^2 + px + q$ এরও দুইটি উৎপাদক হবে ।

মনে করি, $x^2 + px + q$ এর উৎপাদক দুইটি $(x + a)$, $(x + b)$

সুতরাং, $x^2 + px + q = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$

তাহলে, $p = a + b$ এবং $q = ab$

এখন, $x^2 + px + q$ এর উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে, q কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে যার বীজগণিতীয় সমষ্টি p হয় । এই প্রক্রিয়াকে মধ্যপদ বিভাজন *(Middle term breakup)* বলে ।

$x^2 + 7x + 12$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে 12 কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে যার সমষ্টি 7 এবং গুণফল 12 হয় । 12 এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াসমূহ 1,12; 2, 6 ও 3, 4 । এদের মধ্যে 3,4 জোড়াটির সমষ্টি $(3 + 4) = 7$ এবং গুণফল $3 \times 4 = 12$

$\therefore\ x^2 + 7x + 12 = (x + 3)\ (x + 4)$

মন্তব্য : প্রতিক্ষেত্রে p ও q উভয়ই ধনাত্মক বিবেচনা করে, $x^2 + px + q$, $x^2 - px + q$, $x^2 + px - q$ এবং $x^2 - px - q$ আকারের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিতে q ধনাত্মক হওয়াতে q এর উৎপাদক দুইটি একই চিহ্নযুক্ত রাশি অর্থাৎ, উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হবে । এক্ষেত্রে, p ধনাত্মক হলে, q এর উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হবে, আর p ঋণাত্মক হলে, q এর উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হবে ।

তৃতীয় ও চতুর্থ আকারের রাশিতে q ঋণাত্মক অর্থাৎ, $(-q)$ হওয়াতে q এর উৎপাদক দুইটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে এবং p ধনাত্মক হলে, উৎপাদক দুইটির ধনাত্মক সংখ্যাটি ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরম মান থেকে বড় হবে । আর p ঋণাত্মক হলে, উৎপাদক দুইটির ঋণাত্মক সংখ্যার পরম মান ধনাত্মক সংখ্যা থেকে বড় হবে ।

উদাহরণ ৩ । $x^2 + 5x + 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এমন দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যাদের সমষ্টি 5 এবং গুণফল 6 ।

6 এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে 1, 6 ও 2, 3 ।

এদের মধ্যে 2, 3 জোড়াটির সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $2 + 3 = 5$ এর গুণফল $2 \times 3 = 6$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6\\ &= x(x + 2) + 3(x + 2)\\ &= (x + 2)\,(x + 3)\end{aligned}$$

২০১৮

উদাহরণ ৪ । $x^2 - 15x + 54$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি -15 এবং গুণফল 54 । এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ঋণাত্মক, কিন্তু গুণফল ধনাত্মক । কাজেই, সংখ্যা দুইটি উভয়ই ঋণাত্মক হবে ।

54 এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে $-1, -54; -2, -27; -3, -18; -6, -9$ । এদের মধ্যে $-6, -9$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= -6 -9 = -15$ এবং এদের গুণফল$= (-6) \times (-9) = 54$

$$\begin{aligned}\therefore x^2 - 15x + 54 &= x^2 - 6x - 9x + 54\\ &= x(x-6) - 9(x-6)\\ &= (x-6)(x-9)\end{aligned}$$

উদাহরণ ৫ । $x^2 + 2x - 15$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি 2 এবং গুণফল (-15) । এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ধনাত্মক, কিন্তু গুণফল ঋণাত্মক । কাজেই, সংখ্যা দুইটির মধ্যে যে সংখ্যার পরম মান বড় সেই সংখ্যাটি ধনাত্মক, আর যে সংখ্যার পরম মান ছোট সে সংখ্যাটি ঋণাত্মক হবে । (-15) এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে $(-1, 15)$ ও $(-3, 5)$ ।

এদের মধ্যে $-3, 5$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= -3 + 5 = 2$

$$\begin{aligned}\therefore x^2 + 2x - 15 &= x^2 + 5x - 3x - 15\\ &= x(x+5) - 3(x+5)\\ &= (x+5)(x-3)\end{aligned}$$

উদাহরণ ৬ । $x^2 - 3x - 28$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যাদের সমষ্টি (-3) এবং গুণফল (-28) । এখানে দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ঋণাত্মক এবং গুণফল ঋণাত্মক, কাজেই সংখ্যা দুইটির মধ্যে যে সংখ্যার পরম মান বড় সেই সংখ্যাটি ঋণাত্মক, আর যে সংখ্যাটির পরম মান ছোট সেই সংখ্যাটি ধনাত্মক হবে । (-28) এর সম্ভাব্য উৎপাদক জোড়াগুলো হচ্ছে, $-1, 28; 2, -14$ ও $4, -7$ । এদের মধ্যে $4, -7$ এর সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= -7 + 4 = -3$

$$\begin{aligned}\therefore x^2 - 3x - 28 &= x^2 - 7x + 4x - 28\\ &= x(x-7) + 4(x-7)\\ &= (x-7)(x+4)\end{aligned}$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১ । $x^2 - 18x + 72$ ২ । $x^2 - 9x - 36$ ৩ । $x^2 - 23x + 132$

৪.৬ $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির উৎপাদক

মনে করি, $ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q)$

$$= rsx^2 + (rq + sp)x + pq$$

তাহলে, $a = rs,\ b = rq + sp$ এবং $c = pq$

সুতরাং, $ac = rspq = rq \times sp$ এবং $b = rq + sp$

এখন, $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, x^2 এর সহগ a এবং পদ ধ্রুবক c-এর গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যেন এদের বীজগণিতীয় যোগফল x এর সহগ b এর সমান হয় এবং a ও c এর গুণফলের সমান হয়।

$2x^2 + 11x + 15$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, $(2 \times 15) = 30$ কে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যার যোগফল 11 এবং গুণফল 30 হয়।

30 এর উৎপাদক জোড়াসমূহ $1, 30; 2, 15; 3, 10$ ও $5, 6$ এর মধ্যে $5,6$ জোড়াটির যোগফল $5 + 6 = 11$ এবং গুণফল $5 \times 6 = 30$.

$\therefore\ 2x^2 + 11x + 15 = 2x^2 + 5x + 6x + 15$

$$= x(2x + 5) + 3(2x + 5) = (2x + 5)(x + 3)$$

মন্তব্য : $ax^2 + bx + c$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণের সময় $x^2 + px + q$ এর p, q এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বিভিন্ন চিহ্নযুক্ত মানের জন্য যে নিয়ম অনুসরণ করা হয়েছে ; a,b,c এর চিহ্নযুক্ত মানের জন্য একই নিয়ম অনুসরণ করতে হবে। এক্ষেত্রে p এর পরিবর্তে b এবং q এর পরিবর্তে $(a \times c)$ ধরতে হবে।

উদাহরণ ৭। $2x^2 + 9x + 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : এখানে, $2 \times 10 = 20$ [x^2 এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল]

এখন, $4 \times 5 = 20$ এবং $4 + 5 = 9$

$\therefore\ 2x^2 + 9x + 10 = 2x^2 + 4x + 5x + 10$

$$= 2x(x + 2) + 5(x + 2) = (x + 2)(2x + 5)$$

২০১৮

উদাহরণ ৮ । $3x^2 + x - 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এখানে, $3 \times (-10) = -30$

এখন, $(-5) \times 6 = -30$ এবং $(-5) + 6 = 1$

$$\therefore\ 3x^2 + x + 10 = 3x^2 + 6x - 5x - 10$$
$$= 3x(x + 2) - 5(x + 2)$$
$$= (x + 2)(3x - 5)$$

উদাহরণ ৯ । $4x^2 - 23x + 33$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এখানে, $4 \times 33 = 132$

এখন, $(-11) \times (-12) = 132$ এবং $(-11) + (-12) = -23$

$$\therefore\ 4x^2 - 23x + 33 = 4x^2 - 11x - 12x + 33$$
$$= x(4x - 11) - 3(4x - 11)$$
$$= (4x - 11)(x - 3)$$

উদাহরণ ১০ । $9x^2 - 9x - 4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ।

সমাধান : এখানে, $9 \times (-4) = -36$

এখন, $3 \times (-12) = -36$ এবং $3 + (-12) = -9$

$$\therefore\ 9x^2 - 9x - 4 = 9x^2 + 3x - 12x - 4$$
$$= 3x(3x + 1) - 4(3x + 1)$$
$$= (3x + 1)(3x - 4)$$

কাজ : উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১ । $8x^2 + 18x + 9$ ২ । $27x^2 + 15x + 2$ ৩ । $2a^2 - 6a - 20$

২০১৮

অনুশীলনী ৪.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

১। a^3+8 ২। $8x^3+343$ ৩। $8a^4+27ab^3$ ৪। $8x^3+1$

৫। $64a^3-125b^3$ ৬। $729a^3-64b^3c^6$ ৭। $27a^3b^3+64b^3c^3$ ৮। $56x^3-189y^3$

৯। $3x-75x^3$ ১০। $4x^2-y^2$ ১১। $3ay^2-48a$

১২। $a^2-2ab+b^2-p^2$ ১৩। $16y^2-a^2-6a-9$ ১৪। $8a+ap^3$

১৫। $2a^3+16b^3$ ১৬। $x^2+y^2-2xy-1$ ১৭। $a^2-2ab+2b-1$

১৮। x^4-2x^2+1 ১৯। $36-12x+x^2$ ২০। x^6-y^6

২১। $(x-y)^3+z^3$ ২২। $64x^3-8y^3$ ২৩। $x^2+14x+40$

২৪। $x^2+7x-120$ ২৫। $x^2-51x+650$ ২৬। $a^2+7ab+12b^2$

২৭। $p^2+2pq-80q^2$ ২৮। $x^2-3xy-40y^2$ ২৯। $(x^2-x)^2+3(x^2-x)-40$

৩০। $(a^2+b^2)^2-18(a^2+b^2)-88$ ৩১। $(a^2+7a)^2-8(a^2+7a)-180$

৩২। $x^2+(3a+4b)x+(2a^2+5ab+3b^2)$ ৩৩। $6x^2-x-15$ ৩৪। $x^2-x-(a+1)(a+2)$

৩৫। $3x^2+11x-4$ ৩৬। $3x^2-16x-12$ ৩৭। $2x^2-9x-35$

৩৮। $2x^2-5xy+2y^2$ ৩৯। $x^3-8(x-y)^3$ ৪০। $10p^2+11pq-6q^2$

৪১। $2(x+y)^2-3(x+y)-2$ ৪২। $ax^2+(a^2+1)x+a$ ৪৩। $15x^2-11xy-12y^2$

৪৪। $a^3-3a^2b+3ab^2-2b^3$

৪.৭ বীজগণিতীয় রাশির গ.সা.গু. ও ল.সা.গু.

সপ্তম শ্রেণিতে অনূর্ধ্ব তিনটি বীজগণিতীয় রাশির সাংখ্যিক সহগসহ গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় সম্পর্কে সম্যক ধারণা দেওয়া হয়েছে। এখানে সংক্ষেপে এ সম্পর্কে পুনরালোচনা করা হলো।

সাধারণ গুণনীয়ক : যে রাশি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটির গুণনীয়ক, একে উক্ত রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক (*Common factor*) বলা হয়। যেমন, x^2y, xy, xy^2, $5x$ রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক হলো x।

আবার, (a^2-b^2), $(a+b)^2$, (a^3+b^3) রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক $(a+b)$.

৪.৭.১ গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু.)

দুই বা ততোধিক রাশির ভিতর যতগুলো মৌলিক সাধারণ গুণনীয়ক আছে, এদের সকলের গুণফলকে ঐ রাশিদ্বয় বা রাশিগুলোর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক

(*Highest Common Factor*) বা সংক্ষেপে গ.সা.গু. (*H.C.F.*) বলা হয়। যেমন, $a^3b^2c^3$, $a^5b^3c^4$ ও $a^4b^3c^2$ এই রাশি তিনটির গ.সা.গু. হবে $a^3b^2c^2$।

আবার, $(x+y)^2, (x+y)^3, (x^2-y^2)$ এই তিনটি রাশির গ.সা.গু. $(x+y)$।

গ.সা.গু. নির্ণয়ের নিয়ম

প্রথমে পাটিগণিতের নিয়মে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গ.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে। এরপর বীজগণিতীয় রাশিগুলোর মৌলিক উৎপাদক বের করতে হবে। অতঃপর সাংখ্যিক সহগের গ.সা.গু. এবং প্রদত্ত রাশিগুলোর সর্বোচ্চ বীজগণিতীয় সাধারণ মৌলিক উৎপাদকগুলোর ধারাবাহিক গুণফলই হবে নির্ণেয় গ.সা.গু.।

উদাহরণ ১। $9a^3b^2c^2, 12a^2bc, 15ab^3c^3$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : 9, 12, 15-এর গ.সা.গু. $= 3$

a^3, a^2, a এর গ.সা.গু $= a$

b^2, b, b^3 এর গ.সা.গু $= b$

c^2, c, c^3 এর গ.সা.গু $= c$

নির্ণেয় গ.সা.গু. $= 3abc$

উদাহরণ ২। $x^3-2x^2, x^2-4, xy-2y$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $= x^3-2x^2 = x^2(x-2)$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2-4 = (x+2)(x-2)$

তৃতীয় রাশি $= xy-2y = y(x-2)$

রাশিগুলোতে সাধারণ উৎপাদক $(x-2)$ এবং এর সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাতযুক্ত উৎপাদক $(x-2)$.

$\therefore$ গ.সা.গু. $= (x-2)$

উদাহরণ ৩। $x^2y(x^3-y^3), x^2y^2(x^4+x^2y^2+y^4)$ এবং $x^3y^2+x^2y^3+xy^4$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $= x^2y(x^3-y^3)$

$$= x^2y(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2y^2(x^4+x^2y^2+y^4)$

$$= x^2y^2\{(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2\}$$
$$= x^2y^2\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$$
$$= x^2y^2\{(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)\}$$
$$= x^2y^2(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

তৃতীয় রাশি = $x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 = xy^2(x^2 + xy + y^2)$

এখানে, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির সাধারণ উৎপাদক $xy(x^2 + xy + y^2)$

$\therefore$ গ.সা.গু.$= xy(x^2 + xy + y^2)$

কাজ : গ.সা.গু. নির্ণয় কর :

১। $15a^3b^2c^4,\ 25a^2b^4c^3$ এবং $20a^4b^3c^2$

২। $(x+2)^2, (x^2+2x)$ এবং (x^2+5x+6)

৩। $6a^2+3ab,\ 2a^2+5a-12$ এবং a^4-8a

সাধারণ গুণিতক : কোনো একটি রাশি অপর দুই বা ততোধিক রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাজ্যকে ভাজকদ্বয় বা ভাজকগুলোর সাধারণ গুণিতক (*Common Multiple*) বলে। যেমন, a^2b^2c রাশিটি a, b, c, ab, bc, ca, a^2b, ab^2, a^2c, b^2c রাশিগুলোর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং, a^2b^2c রাশিটি a, b, c, ab, bc, ca, a^2b, a^2c, ab^2, b^2c রাশিগুলোর সাধারণ গুণিতক। আবার, $(a+b)^2(a-b)$ রাশিটি $(a+b)$, $(a+b)^2$ ও (a^2-b^2) রাশি তিনটির সাধারণ গুণিতক।

৪.৭.২ লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু.)

দুই বা ততোধিক রাশির সম্ভাব্য সকল উৎপাদকের সর্বোচ্চ ঘাতের গুণফলকে রাশিগুলোর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (*Least Common Multiple*) বা সংক্ষেপে ল.সা.গু. (L.C.M.) বলা হয়।

যেমন, x^2y^2z রাশিটি x^2yz, xy^2 ও xyz রাশি তিনটির ল.সা.গু.।

আবার, $(x+y)^2(x-y)$ রাশিটি $(x+y)$, $(x+y)^2$ ও (x^2-y^2) রাশি তিনটির ল.সা.গু.।

ল.সা.গু. নির্ণয়ের নিয়ম

প্রথমে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের ল.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে।
এরপর সাধারণ উৎপাদকের সর্বোচ্চ ঘাত বের করতে হবে। অতঃপর উভয়ের গুণফলই হবে প্রদত্ত রাশিগুলোর ল.সা.গু.।

উদাহরণ ৪। $4a^2bc, 8ab^2c, 6a^2b^2c$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

সামাধান : এখানে, 4, 8 ও 6 এর ল.সা.গু $= 24$
প্রদত্ত রাশিগুলোর সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাতের উৎপাদক যথাক্রমে a^2, b^2, c

$\therefore$ ল.সা.গু$= 24a^2b^2c$.

২০১৮

উদাহরণ ৫ । $x^3+x^2y, x^2y+xy^2,\ x^3+y^3$ এবং $(x+y)^3$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর ।

সমাধান : এখানে, প্রথম রাশি $= x^3+x^2y = x^2(x+y)$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2y+xy^2 = xy(x+y)$

তৃতীয় রাশি $= x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

চতুর্থ রাশি $= (x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$

$\therefore$ ল.সা.গু. $= x^2y(x+y)^3(x^2-xy+y^2) = x^2y(x+y)^2(x^3+y^3)$

উদাহরণ ৬ । $4(x^2+ax)^2, 6(x^3-a^2x)$ এবং $14x^3(x^3-a^3)$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর ।

সমাধাণ : এখানে, প্রথম রাশি $= 4(x^2+ax)^2 = 2\times 2\times x^2(x+a)^2$

দ্বিতীয় রাশি $= 6(x^3-a^2x) = 2\times 3\times x(x^2-a^2) = 2\times 3\times x(x+a)(x-a)$

তৃতীয় রাশি $= 14x^3(x^3-a^3) = 2\times 7\times x^3(x-a)(x^2+ax+a^2)$

$\therefore$ ল.সা.গু. $= 2\times 2\times 3\times 7\times x^3(x+a)^2(x-a)\ (x^2+ax+a^2)$

$= 84x^3(x+a)^2(x^3-a^3)$

> **কাজ :** ল.সা.গু. নির্ণয় কর :
>
> ১ । $5x^3y,\ 10x^2y,\ 20x^4y^2$
>
> ২ । $x^2-y^2,\ 2(x+y),\ 2x^2y+2xy^2$
>
> ৩ । $a^3-1,\ a^3+1,\ a^4+a^2+1$

অনুশীলনী ৪.৪

১ । $-5-y$ এর বর্গ নিচের কোনটি?

ক) $y^2+10y+25$ খ) $y^2-10y+25$ গ) $25-10y+y^2$ ঘ) $y^2-10y-25$

২ । $(x-2)$ ও $(4x+3)$ এর গুণফল নিচের কোনটি?

ক) $4x^2-5x+6$ খ) $4x^2-11x-6$ গ) $4x^2+5x-6$ ঘ) $4x^2-5x-6$

৩ । x^2-2x-3 ও x^2+2x-3 এর গ.সা.গু কত?

ক) $x+1$ খ) $x-1$ গ) 1 ঘ) 0

২০১৮

৪। $(3x-5)\ (5+3x)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $3x^2-25$ খ) $9x^2-5$ গ) $(3x)^2-5^2$ ঘ) $9x^2-25$

♦ **নিচের তথ্যের আলোকে (৫–৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$x^2-\sqrt{3}\ x+1=0$ হলে

৫। $x+\frac{1}{x}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক) $-\sqrt{3}\,x$ খ) $\sqrt{3}\,x$ গ) $-\sqrt{3}$ ঘ) $\sqrt{3}$

৬। $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক) 1 খ) 5 গ) 7 ঘ) 11

৭। $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক) 12 খ) $6\sqrt{3}$ গ) $3\sqrt{3}+3$ ঘ) 0

৮। x^2-x-30 এর উৎপাদকে বিশ্লেষিতরূপ নিচের কোনটি?

ক) $(x-5)\,(x+6)$ খ) $(x+5)(x-6)$ গ) $(x-5)\,(x-6)$ ঘ) $(x+5)(x+6)$

৯। $x^2-10x+21$ ও x^2+6x-7 দুইটি বীজগাণিতিক রাশি হলে

i. রাশি দুইটির গ.সা.গু $x-7$

ii. রাশি দুইটির ল.সা.গু $(x+1)(x-3)\,(x-7)$

iii. রাশি দুইটির গুণফল x^4-60x^2-147

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

১০। বীজগণিতের সূত্রাবলিতে

$(i)\quad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$(ii)\quad ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$(iii)\quad x^3+y^3=(x+y)^3+3xy\,(x+y)$

উপরের তথ্য অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১। $x+y=5$ এবং $x-y=3$ হলে,

(১) x^2+y^2 এর মান কত ?

(ক) 15 (খ) 16 (গ) 17 (ঘ) 18

(২) xy এর মান কত ?

(ক) 10 (খ) 8 (গ) 6 (ঘ) 4

(৩) x^2-y^2 এর মান কত ?

(ক) 13 (খ) 14 (গ) 15 (ঘ) 16

১২। $x+\frac{1}{x}=2$ হলে,

(১) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত ?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 4

(২) $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কত ?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 4

(৩) $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান কত ?

(ক) 8 (খ) 6 (গ) 4 (ঘ) 2

গ.সা.গু. নির্ণয় কর (১৩-২০) :

১৩। $36a^2b^2c^4d^5$, $54a^5c^2d^4$ এবং $90a^4b^3c^2$

১৪। $20x^3y^2a^3b^4$, $15x^4y^3a^4b^3$ এবং $35x^2y^4a^3b^2$

১৫। $15x^2y^3z^4a^3$, $12x^3y^2z^3a^4$ এবং $27x^3y^4z^5a^7$

১৬। $18a^3b^4c^5$, $42a^4c^3d^4$, $60b^3c^4d^5$ এবং $78a^2b^4d^3$

১৭। x^2-3x, x^2-9 এবং x^2-4x+3

১৮। $18(x+y)^3$, $24(x+y)^2$ এবং $32(x^2-y^2)$

১৯। $a^2b(a^3-b^3),\ a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$ এবং $a^3b^2+a^2b^3+ab^4$

২০। $a^3-3a^2-10a,\ a^3+6a^2+8a$ এবং $a^4-5a^3-14a^2$

ল.সা.গু. নির্ণয় কর (২১-২৮) :

২১। $a^5b^2c,\ ab^3c^2$ এবং $a^7b^4c^3$

২২। $5a^2b^3c^2,\ 10ab^2c^3$ এবং $15ab^3c$

২৩। $3x^3y^2,\ 4xy^3z,\ 5x^4y^2z^2$ এবং $12xy^4z^2$

২৪। $3a^2d^3,\ 9d^2b^2,\ 12c^3d^2,\ 24a^3b^2$ এবং $36c^3d^2$

২৫। $x^2+3x+2,\ x^2-1$ এবং x^2+x-2

২৬। $x^2-4,\ x^2+4x+4$ এবং x^3-8

২৭। $6x^2-x-1,\ 3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$

২৮। $a^3+b^3,\ (a+b)^3, (a^2-b^2)^2$ এবং $(a^2-ab+b^2)^2$

২৯। $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ হলে,

(ক) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\dfrac{x^6+1}{x^3}$ এর মান কত ?

(গ) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ এর ঘন নির্ণয় করে মান বের কর।

৩০। $3x-5y+3z$ এবং $3x+5y-z$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক) ১ম রাশিটির বর্গ নির্ণয় করো।

খ) রাশি দুইটির গুণফলকে দু'টি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করো।

গ) ২য় রাশিটির মান শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $27x^3+125y^3+45xyz=z^3$

৩১। $P=3x^2-16x-12, Q=3x^2+5x+2,\ R=3x^2-x-2$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলতে কী বুঝায়?

খ) $Q=0$ হলে $9x^2+\dfrac{4}{x^2}$ এর মান নির্ণয় করো।

গ) P, Q, R এর ল.সা.গু নির্ণয় করো।